Управление образования города Пензы

XXVI научно-практическая конференция

Школьников г. Пензы

«Я исследую мир»

МБОУ СОШ №71 г. Пензы

Секция «Математика»

«Дробно-рациональные и квадратичные функции в заданиях ОГЭ и ЕГЭ»

Выполнили: Ермолаев Владислав Олегович,

Герасимов Кирилл Алексеевич,

Ученики 10 «А» класса

Тел. 89631031716

Научный руководитель:

Науменко Лариса Владимировна,

учитель математики

Тел. 89273722554

Пенза, 2021

Содержание:

Введение: при выборе темы мы столкнулись с новыми девятыми заданиями ЕГЭ, в которых показаны графики функций разных видов. Нами было принято решение научиться решать задачи.

Цель: применить свойства квадратичных и дробно-рациональных функций при решении заданий ОГЭ и ЕГЭ.

Задачи: показать решение задач с помощью свойств квадратичных и дробно-рациональных функций, входящих в задания ОГЭ и ЕГЭ.

Выбор темы: необходимость умения решения данных задач.

Предмет исследования: графики функций.

Актуальность: дробно-рациональные и квадратичные функции являются важной темой в курсе алгебры, также появилась надобность решения данных задач, так как они включены в задания ОГЭ и ЕГЭ.

Практическая значимость: самим разобраться в решении задач и оказать помощь другим при сдаче экзаменов.

Гипотеза: сможем ли мы решить эти задачи.

Этапы работы:

1) Выбор темы.
2) Поиск информации в Интернете.
3) Выявление свойств функций, решение заданий.
4) Составление работы.
5) Защита работы.

Дробно-рациональные функции:

Дробно-рациональная функция — это функция вида $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где f(x) и g(x) — некоторые функции. График дробно-рациональной функции представляет собой гиперболу. Функция имеет две асимптоты (асимптота – прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль ветви в бесконечность) — вертикальную и горизонтальную.

Прямая линия называется асимптотой графика функции, если график функции неограниченно сближается с этой прямой при удалении точки графика в бесконечность:

1) x=a уравнение вертикальной асимптоты
2) y=b уравнение горизонтальной асимптоты
3) y=kx+b уравнение наклонной асимптоты

Дробно-линейная функция представляет собой частный случай дробно-рациональной функции.

Дробно-линейная функция – это такая алгебраическая дробь $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, у которой числитель и знаменатель представляют собой линейные функции.

Во всякой дробно-линейной функции можно выделить целую часть.

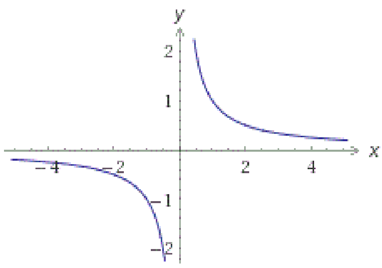
Построим график функции y=1/x:

D(y): x≠0

E(y): y≠0

y = k/x - нечетная

x	1	2	$\frac{1}{2}$	3
y	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$



Построим график функции y=k/x:

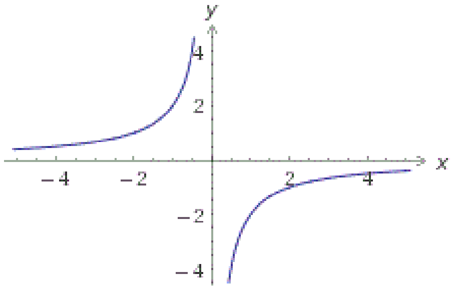
При k=2 y=-2/x:

D(y): x≠0

E(y): y≠0

y=k/x – нечетная

x	2	4	1	$\frac{1}{2}$
y	–1	$-\frac{1}{2}$	–2	–4



Пример. Построим график функции $y=\frac{2x-1}{x-3}$, т.е. представим ее в виде $\frac{k}{x-m}+n$: выделим целую часть дроби, разделив числитель на знаменатель, мы получим:

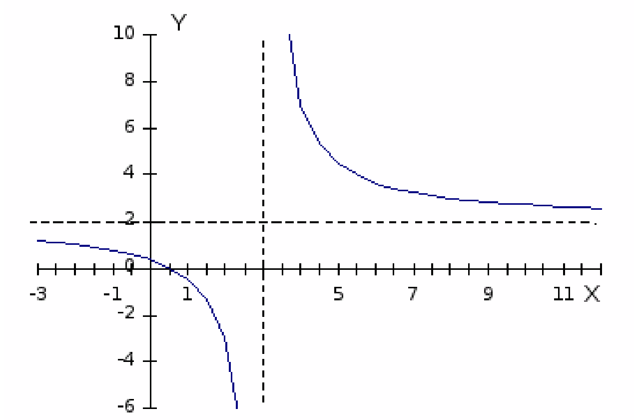
$$\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2x-6+5}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x-3}+\frac{5}{x-3}=\frac{5}{x-3}+2.$$

Итак, $y=\frac{5}{x-3}+2$. Мы видим, что график этой функции может быть получен из графика функции y=5/x с помощью двух последовательных сдвигов: сдвига гиперболы y=5/x вправо на 3 единицы, а затем сдвига полученной гиперболы $y=\frac{5}{x-3}$ вверх на 2 единицы.

При этих сдвигах асимптоты гиперболы y=5/x также переместятся: ось x на 2 единицы вверх, а ось y на 3 единицы вправо.

Для построения графика проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую y=2 и прямую x=3. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения каждой из них составим две таблицы: одну для x=3 (т. е. первую слева от точки пересечения асимптот, а вторую справа от нее):

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично (используя вторую таблицу) получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y=\frac{2x-1}{x-3}$.



Любую дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ можно записать аналогичным образом, выделив ее целую часть. Следовательно, графики всех дробно-линейных функций являются гиперболами, различным образом сдвинутыми параллельно координатным осям и растянутыми по оси Оу.

Алгоритм построения графика дробно-рациональной функции, содержащей квадратный трехчлен.

1. Найти область определения функции.
2. Разложить на множители квадратный трехчлен.
3. Сократить дробь.
4. Построить график (параболу, гиперболу, кубическую параболу).
5. Исключить из графика точки, не входящие в область определения («выколотые» точки).
6. Найти значение функции в «выколотых» точках.
7. Определить, при каких значениях b прямая y=b имеет с графиком ровно одну общую точку.

Примеры заданий из ЕГЭ:

1.На рисунке изображён график функции вида f (x) = a / (x + b) + c, где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите f (13).

Решение.

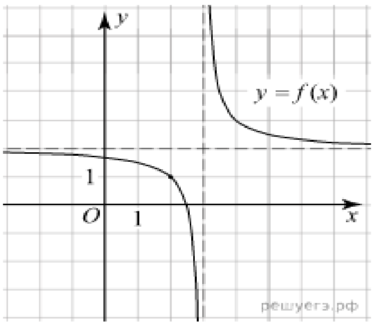
График функции имеет горизонтальную асимптоту y = 2 значит, c = 2.

График функции имеет вертикальную асимптоту x = 3 значит, b = - 3.

По графику f (2) = 1, тогда a / (2 - 3) + 2 = 1, a = 1

Таким образом, f (x) = 1 / (x - 3) + 2. Найдём f (13): f (13) = 1 / (13 - 3) + 2 = 2,1

Ответ: 2,1.



2.На рисунке изображён график функции вида f (x) = a / (x + b) + c, где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите f (9).

Решение.

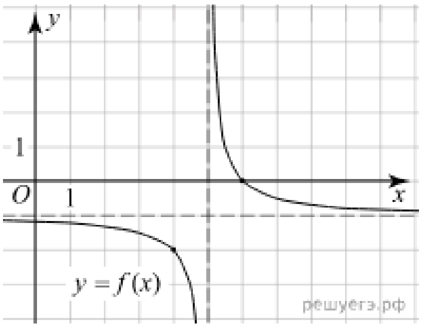
График функции имеет горизонтальную асимптоту y = - 1 значит, c = - 1.

График функции имеет вертикальную асимптоту x = 5 значит, b = - 5.

По графику f (6) = 0, тогда a / (6 - 5) – 1 = 0, a = 1

Таким образом, f (x) = 1 / (x - 5) - 1. Найдём f (9): f (9) = 1 / (9 - 5) – 1 = -0,75

Ответ: - 0,75.



Пример заданий из ОГЭ:

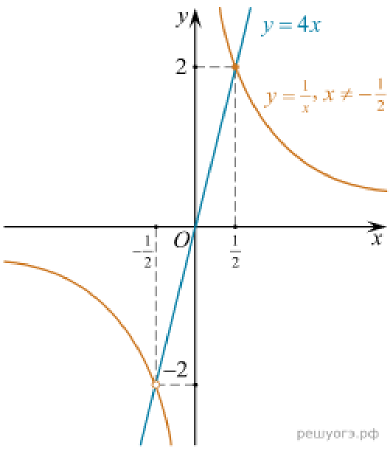
1.Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

При $x \neq -0,5$ имеем:

$$y = \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}.$$

Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой (−0,5; −2). Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку. Тогда $k = \frac{-2}{-0,5} = 4,$ и уравнение прямой примет вид: $y = 4x.$



Ответ: 4.

Квадратичные функции:

Квадратичная функция — это функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — заданные числа.

Как построить график квадратичной функции

График квадратичной функции называют параболой.

Парабола выглядит следующим образом.

Существует четкий алгоритм действий при построении графика квадратичной функции.

1) Определить направление ветвей параболы.
2) Найти координаты вершин параболы.
3) Провести ось симметрии.
4) Определить точки пересечения графика с осью x или найти нули функции.
5) Составить таблицу значений функции.

Направление ветвей параболы

Если «$a > 0$», то ветви направлены вверх. 

Если «$a < 0$», то ветви направлены вниз. 

Пример.

Построим график квадратичной функции «$y = x^2 - 7x + 10$».

Найдем «x_0» для нашей функции «$y = x^2 - 7x + 10$». $x_0 = 3{,}5$

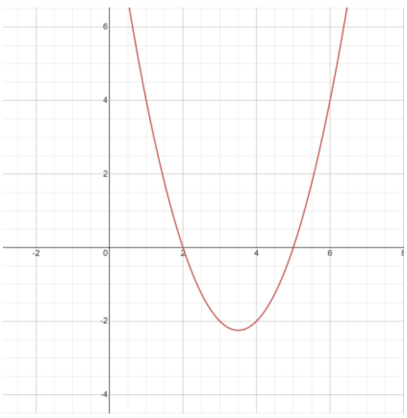
Теперь нам нужно найти «y_0» (координату вершины по оси «Oy»). Для этого нужно подставить найденное значение «x_0» в исходную функцию.

$y_0(3{,}5) = (3{,}5)^2 - 7 \cdot 3{,}5 + 10 = 12{,}25 - 24{,}5 + 10 = -12{,}25 + 10 = -2{,}25$

Выпишем полученные координаты вершины параболы.

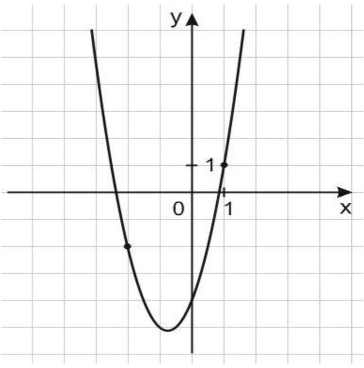
A (3,5; −2,25) — вершина параболы.

Отметим вершину параболы на системе координат. Проведем через отмеченную точку ось симметрии, так как парабола — это график чётной функции относительно оси «Oy».



Примеры заданий из ЕГЭ:

1. На рисунке изображён график функции f (x) = $2x^2 + bx + c$. Найдите f (-5).



Решение: График функции $y = 2x^2 + bx + c$ проходит через точки с координатами (1; 1) и (-2; -2). Подставляя координаты этих точек в формулу функции, получим:

$$\begin{cases} 2 + b + c = 1 & - \\ 8 - 2b + c = -2 & - \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = -1 \\ -2b + c = -10 \end{cases}$$

отсюда b = 3, c = 4

Формула функции имеет вид: f (x) = $2x^2 + 3x - 4$

f (-5) = 2 * 25 – 3 * 5 – 4 =31 Ответ: 31**.**

2.
На рисунке изображён график функции вида f (x) = $ax^2 + bx + c$, где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите значение f (x) = 0.
Решение.
f (x) = $ax^2 + bx + c$, представим в виде $a(x-m)^2 + n$, где m - сдвиг вершины по оси OX, n – сдвиг вершины по оси OY, откуда берём m = 7, n = 5
По рисунку определяем, что f (x) = $-(-5 + x)^2 + 7 = -(x^2 - 10x + 25) + 7 = -x^2 + 10x - 18$, значит a = -1, b = 10, c = -18.
Тогда дискриминант уравнения $-x^2 + 10x - 18 = 0$ равен 28 Ответ: 28.

Пример задания из ОГЭ:

1.Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях с прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

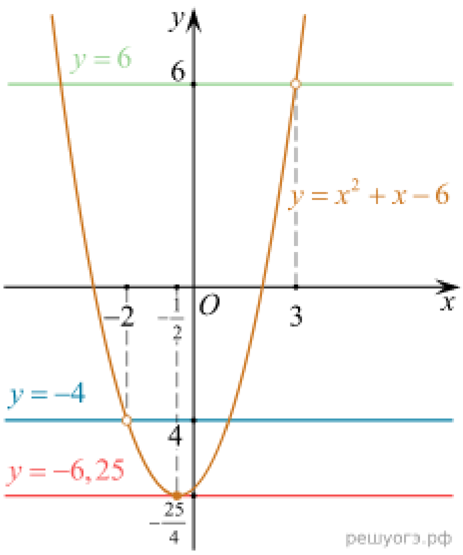
Решение.

Пусть $t=x^2$, тогда числитель принимает вид $t^2-13t+36$. По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения $t^2-13t+36=0$ равна 13, а их произведение — 36. Тем самым, это числа 4 и 9. Тогда по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, получаем: $t^2-13t+36=(t-4)(t-9)$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем: $x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$. Сократим дробь: при $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид: $y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, её график — парабола с выколотыми точками $(-2;-4)$ и $(3;6)$. Выделим полный квадрат: $y=x^2+x-6=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-6=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}$.

Следовательно, искомая парабола получается сдвигом графика функции $y=x^2$ на $(-0,5;-6,25)$ — см. Рис.

Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5;-6,25)$, ординаты выколотых точек суть $y(-2)=4-2-6=-4$ и $y(3)=9+3-6=6$. Поэтому $c=-6,25$ или $c=6$.

Ответ: $c=-6,25$ $c=-4$ или $c=6$.



Заключение:

В ходе выполнения работы мы изучили дробно-рациональные и квадратичные графики функций, научились их решать. Полученные знания и навыки непременно помогут при сдаче экзаменов.

Литература:
https://ege-study.ru/ru/ege/podgotovka/matematika/zadanie-9-ege-po-matematike-grafiki-funkcij/
https://math-prosto.ru/ru/pages/quadratic_function/quadratic_function_how_to_draw_parabola/
https://multiurok.ru/files/drobno-ratsional-naia-funktsiia-zadaniie-23-oge.html
https://ege.sdamgia.ru/test?theme=294
ЕГЭ / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, О. А. Ворончагина, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин и др., под ред. И. В. Ященко - Москва: издательство "Экзамен"; 2022 г. - 232 с. (Серия "ЕГЭ. 50 вариантов. Тесты от разработчиков")